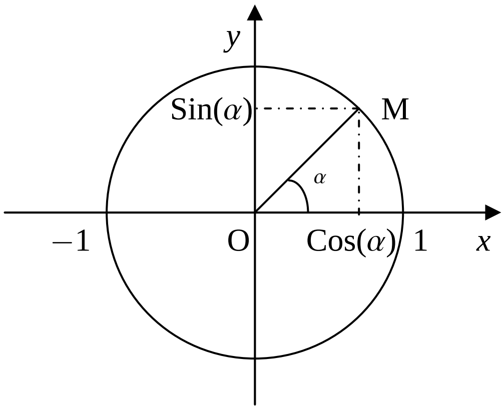
FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES 3

A. Cercle trigonométrique



Définition

Le cercle trigonométrique est le cercle C de centre O(0, 0) et de rayon R = 1 dont l'équation est

$$x^2 + y^2 = 1$$

Remarque : *Le sens de parcours du cercle trigonométrique est le sens inverse des aiguilles d'une montre (par convention).*

B. Fonctions circulaires

1. La fonction sinus

La fonction $y = Sin(x)$ *est une fonction IMPAIRE de période* 2π*.*
Cette fonction est continue et définie sur $\mathbb{R}$ *et vérifie les relations :*

$$\boxed{\begin{gathered} -1 \leq Sin(x) \leq 1 \\ Sin(-x) = -Sin(x) \\ Sin(\pi \pm x) = \mp Sin(x) \\ Sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = Cos(x) \end{gathered}}$$

Sa dérivée qui se déduit par une rotation dans le sens inverse trigonométrique sur le cercle (sens horloge) est égale à :

$$\boxed{(Sin(x))' = Cos(x)}$$

2. La fonction cosinus

La fonction $y = Cos(x)$ *est une fonction PAIRE de période 2π.*
Cette fonction est continue et définie sur $\mathbb{R}$ *et vérifie les relations :*

$$\boxed{\begin{array}{l} -1 \leq Cos(x) \leq 1 \\ Cos(-x) = Cos(x) \\ Cos(\pi \pm x) = -Cos(x) \\ Cos\left(\dfrac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp Sin(x) \end{array}}$$

Sa dérivée qui se déduit par une rotation dans le sens inverse trigonométrique sur le cercle (sens horloge) est égale à :

$$\boxed{\left(Cos(x)\right)' = -Sin(x)}$$

<u>Remarque</u> : Les fonctions *Sinus* et *Cosinus* représentent les coordonnées du point M appartenant au cercle trigonométrique.
Ces fonctions vérifient la relation suivante :

$$\boxed{Cos^2(x) + Sin^2(x) = 1}$$

3. La fonction tangente

La fonction $y = Tan(x)$ *est une fonction IMPAIRE de période* π*.*

Cette fonction est continue et définie sur $\mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

et vérifie les relations :

$$\boxed{\begin{array}{l} Tan(-x) = -Tan(x) \\ Tan(\pi \pm x) = \pm Tan(x) \\ Tan\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \frac{1}{Tan(x)} \end{array}}$$

Sa dérivée est égale à :

$$\boxed{(Tan(x))' = \frac{1}{Cos^2(x)} = 1 + Tan^2(x)}$$

4. La fonction cotangente

La fonction $y = Cotan(x) = \frac{1}{Tan(x)}$ *est une fonction IMPAIRE de période* π*. Cette fonction est continue et définie sur* $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ *et vérifie les relations :*

$$\boxed{\begin{array}{l} Cotan(-x) = -Cotan(x) \\ Cotan(\pi \pm x) = \pm Cotan(x) \\ Cotan\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp Tan(x) \end{array}}$$

Sa dérivée est égale à :

$$\boxed{(Cotan(x))' = \frac{-1}{Sin^2(x)} = -\left(1 + Cotan^2(x)\right)}$$

5. Angles remarquables

x	*0*	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π
Sin(x)	*0*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	*1*
Cos(x)	*1*	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	*0*
Tan(x)	*0*	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	*1*	$\sqrt{3}$	∞

C. Fonctions circulaires inverses

1. La fonction arcsinus

$$y = Arcsin(x) \Leftrightarrow x = Sin(y) \text{ avec } -1 \leq x \leq 1$$

Cette fonction continue et définie sur $[-1,1]$ *vérifie les relations :*

$$\boxed{\begin{gathered} -\frac{\pi}{2} \leq Arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2} \\ arcsin(x) = \begin{cases} Arcsin(x) + 2n\pi \\ \pi - Arcsin(x) + 2n\pi \end{cases} \end{gathered}}$$

Sa dérivée est égale à :

$$\boxed{\left(Arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

2. *La fonction arccosinus*

$$y = Arccos(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = Cos(y) \text{ avec } -1 \leq x \leq 1$$

Cette fonction continue et définie sur $[-1,1]$ *vérifie les relations :*

$$\boxed{\begin{gathered} 0 \leq Arccos(x) \leq \frac{\pi}{2} \\ arccos(x) = \begin{cases} Arccos(x) + 2n\pi \\ -Arccos(x) + 2n\pi \end{cases} \end{gathered}}$$

Sa dérivée est égale à :

$$\boxed{\left(Arccos(x)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

<u>Remarque</u> :

Les fonctions arcsinus et arccosinus vérifient la relation :

$$\boxed{Arccos(x) + Arcsin(x) = \frac{\pi}{2}}$$

3. La fonction arctangente

$$y = Arctan(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = Tan(y) \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

Cette fonction continue et définie sur $\mathbb{R}$ *vérifie les relations :*

$$\boxed{\begin{array}{c} -\dfrac{\pi}{2} \leq Arctan(x) \leq \dfrac{\pi}{2} \\ arctan(x) = Arctan(x) + n\pi \end{array}}$$

Sa dérivée est égale à :

$$\boxed{\left(arctan(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

4. La fonction arcotangente

$$y = Arccotan(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = Cotan(y) \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

Cette fonction continue et définie sur $\mathbb{R}$ *vérifie les relations :*

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \leq Arccotan(x) \leq \pi \\ arccotan(x) = Arccotan(x) + n\pi \end{array}}$$

Sa dérivée est égale à :

$$\boxed{\left(arccotan(x)\right)' = \frac{-1}{1+x^2}}$$

T.D. N°2 FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

N°1 : Démontrer de deux façons différentes :

$$Arccos(x) + Arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$

N°2 : Démontrer de deux façons différentes qu'une primitive de

- $Arcsin(x)$ est $xArcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
- $Arccos(x)$ est $xArccos(x) - \sqrt{1-x^2}$

N°3 : Calculs de limites :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-Cos(x)}{Tan^2(x)} \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{xSin(x)}{1-Cos(x)} \; ; \; \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \frac{1+Sin(x)}{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2} \; ; \; \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{Cos(2x)}{Sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} \; ;$$

N°4 : Études des fonctions

- $y = f(x) = \frac{1}{3}Cos(3x) - \frac{3}{4}Cos(2x)$
- $y = g(x) = Cos^2(x) - Cos(x)$
- $y = h(x) = (1+Cos(x))Sin(x)$

N°5 : On considère la fonction *f* définie par : $f(x) = Arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

1. Ensemble de définition et parité de *f*
2. Calculer $f'(x)$; quel est l'ensemble de définition de $f'(x)$

Démontrer qu'il existe deux expressions simples de $f'(x)$ suivant l'intervalle auquel x appartient

3. Dresser le tableau de variations de *f*
4. Utiliser le 2. pour prouver que *f* peut s'écrire plus simplement sur chaque intervalle
5. Prouver par une autre méthode que, sur $[-1,1]$, $f(x) = 2Arc\tan(x)$