T.D. G.E.I.I. SÉRIES

N°1 : Étudier la convergence et déterminer la somme des séries :

1. $\sum_{n\geq 2}\frac{2}{n^2-1}$; $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; $\sum_{n\geq 1}\frac{2}{4n^2-1}$
2. $\sum_{n\geq 1} Log\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]$; $\sum_{n\geq 0} Arctan\left[\frac{1}{n^2+n+1}\right]$; $\sum_{n\geq 2} Log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

N°2 :

1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs.

   Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=l\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{U_n}=l$

2. Soit $\sum U_n$ la série définie par $U_{2p}=\frac{1}{2^p}$, $U_{2p+1}=\frac{1}{2^{p+1}}$

   Étudier cette série par la règle de Cauchy et de d'Alembert

N°3 : Étudier la nature des séries $\sum U_n$ suivantes :

1. $U_n=\frac{a^n n!}{n^n}$ $\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)$; $U_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}a^n$ $\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)$
2. $U_n=\frac{n^\alpha}{a^n}$ $\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)$ $U_n=Cos\left(\frac{1}{n}\right)$; $U_n=Sin\left(\frac{1}{n}\right)$
3. $U_n=\frac{n^2+n-2}{n^4-3n}$; $U_n=\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-1}$; $U_n=\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$
4. $U_n=\frac{Log(n)}{n^2+1}$; $U_n=\frac{1}{n.Log(n)}$;

N°4 :

On rappelle le lemme de Riemann-Lebesgue :

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ alors $\lim\limits_{x\to\infty}\int_a^b f(x)Sin(nx)\,dx=0$

1. Déterminer deux réels *a* et *b* tels que pour tout $n\geq 1$:

$$\int_0^{\pi}\left(ax^2+bx\right)Cos(nx)\,dx=\frac{1}{n^2}$$

2. En utilisant la relation $\sum\limits_{k=1}^{n}Cos(kx)=\dfrac{Sin(2n+1)\frac{x}{2}}{2Sin\left(\frac{x}{2}\right)}-\dfrac{1}{2}$; $\forall x\in\left]0,\pi\right]$

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}+\int_0^{\pi}f(x)Sin(2n+1)\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{n^2}$$

3. En déduire la somme de la série $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$

N°5 : Étudier la nature des séries $\sum U_n$ suivantes :

1. $U_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{Sin(x)}{1+x^2}\,dx$;

2. $U_n=\displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-x^n}\,dx$;