Paradoxe de Galiléo Galiléï
Chute dans l'air

Abstract

L'intention de cet article est d'apporter un éclaircissement sur la légendaire expérience de Pise en explicitant le calcul de la chute de graves dans l'air. Auparavant, il semble nécessaire de rappeler en quoi consiste ce paradoxe.

Voici le texte de Viviani :

« En ce temps-ci (1589-1590), il fut convaincu que l'investigation des effets de la nature exige nécessairement une connaissance vraie de la nature du mouvement, conformément à l'axiome à la fois philosophique et vulgaire ignorato motu ignoratur natura ; c'est alors que, à la grande indignation de tous les philosophes, il démontra - à l'aide d'expériences, de preuves et de raisonnements exacts - la fausseté de très nombreuses conclusions d'Aristote sur la nature du mouvement ; conclusions qui, jusqu'alors, étaient tenues pour parfaitement claires et indubitables.
Ainsi, entre autres, celle que les vitesses de mobiles de même matière, mais inégalement lourds et se mouvant à travers le même milieu ne suivent aucunement la proportion de leur gravité, ainsi qu'il est dit par Aristote, mais se meuvent tous avec la même vitesse. Ce qu'il démontra par des expériences répétées, faites du sommet du clocher de Pise, en présence de tous les autres professeurs et philosophes et de toute l'Université. »

Il s'agit donc de vérifier (par le calcul) si les vitesses de mobiles de <u>même matière</u>, mais inégalement lourds et se mouvant à travers le même milieu sont les mêmes.

A. Equation du mouvement

Si l'on décide de tenir compte de la résistance de l'air, on est amener à faire appel à une modélisation des forces de frottements qui s'opposent au déplacement. Il existe alors deux possibilités.

1°) Modèle de Stokes

La première consiste à utiliser la force de Stokes qui est proportionnelle à la vitesse mais qui ne s'applique qu'à de faibles vitesses.
Dans le cas d'une boule, la force de frottement correspondante est :

$$F_R = 6\pi\eta\, r\, v$$

Avec :

η : coefficient de viscosité du fluide (pour l'air à 20°C : $\eta_{air} = 1.8 \times 10^{-5}$ μPa.s)
r : rayon de la boule
v : vitesse de la boule relativement au fluide

2°) Modèle de Newton

La seconde modélisation est celle dite de Newton qui est proportionnelle au carré de la vitesse et s'applique à des vitesses plus grandes.

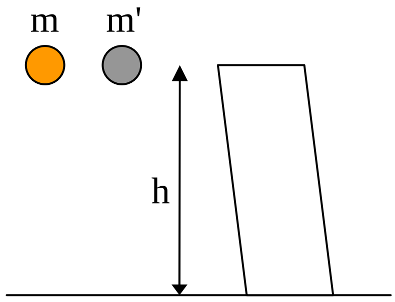
$$F_N = \frac{1}{2} C_w \rho A v^2 = k v^2$$

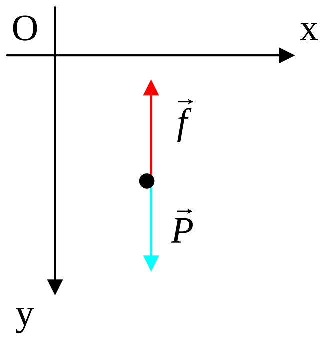
Avec :

C_W : facteur de forme (coefficient de pénétration dans l'air)
ρ : densité du fluide (pour l'air : $\rho_{air} = 1.3$ kg.m^{-3})
A : section droite de la colonne
v : vitesse du corps relativement au fluide

Les dimensions de la tour de Pise (56 m) nous font pencher pour cette dernière. En effet, la vitesse acquise par une boule tombant en chute libre de cette hauteur est approximativement égale à 33 m.s^{-1}.
Le nombre de Reynolds correspondant à cette vitesse est :
$Re = L\rho v/\eta \approx 238\,333$; pour une boule de rayon L = 10 cm
Or le modèle de Stokes reste valable pour un nombre de Reynolds $Re < 2400$ ce qui correspond à un écoulement laminaire.
Ce nombre impose un rayon de boule inférieur à 1 mm.

3°) Bilan de forces





- le poids de l'objet : $\vec{P}$
- la force de frottements de Newton : $\vec{f}$

On applique le principe fondamental de la dynamique.

$$\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

$$mg - f = m\,a$$

$$m\,\frac{dv}{dt} + kv^2 - mg = 0$$

B. Equation de Riccati

L’équation différentielle obtenue s’appelle l’équation de Riccati.
Pour la résoudre, on est amené à faire des changements de variables qui permettent alors de se ramener à une autre équation différentielle plus simple.

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v^2 - g = 0 \quad (1) \quad \text{Equation de Riccati}$$

<u>Solution particulière</u> (vitesse limite)

Lorsque la force de frottement compense le poids la vitesse de chute se stabilise. L’objet tombe alors à vitesse constante appelée vitesse limite :

$$v = cte \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{m\,g}{k}}$$

On pose :

$$v = u + \sqrt{\frac{m\,g}{k}}$$

L'équation (1) s'écrit

$$\frac{du}{dt} + \frac{k}{m} u^2 + 2\,u\sqrt{\frac{g\,k}{m}} = 0$$

C. Equation de Bernoulli

L'équation différentielle obtenue s'appelle l'équation de Bernoulli (1700-1782). Pour la résoudre, on est amené à faire des changements de variables qui permettent alors de se ramener à une autre équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre.

$$\frac{du}{dt} + 2\,u\,\sqrt{\frac{g\,k}{m}} = -\frac{k}{m}\,u^2 \quad (2) \quad \text{Equation de Bernoulli}$$

Divisons (2) par u^2, l'équation (2) s'écrit :

$$\frac{\dot{u}}{u^2} + \frac{2}{u}\sqrt{\frac{g\,k}{m}} = -\frac{k}{m} \quad (3)$$

On pose :

$$z = \frac{1}{u}$$

L'équation (3) s'écrit :

$$-\dot{z} + 2\,z\,\sqrt{\frac{g\,k}{m}} = -\frac{k}{m}$$

$$\dot{z} - 2\,z\,\sqrt{\frac{g\,k}{m}} = \frac{k}{m} \quad (4)$$

On obtient une équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre.

1°) Solution particulière

$$z = \text{cte} \quad \Longrightarrow \quad z = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m\,g}}$$

2°) Solution Sans Second Membre

$$z = \lambda e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t}$$

3°) Solution Générale

$$z = \lambda e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}} \qquad (5)$$

D. Expression de la vitesse

On peut alors en remplaçant dans ce qui précède exprimer la vitesse v

En effet, à partir de

$$z = \frac{1}{u} \;\text{ et }\; v = u + \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

On peut écrire :

$$v = \frac{1}{z} + \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

D'où en remplaçant par la valeur de z obtenue en (5)

$$v = \frac{1}{\lambda e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}} + \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Soit finalement :

$$v = \frac{\frac{1}{2} + \lambda \sqrt{\frac{mg}{k}}\; e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t}}{\lambda e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}} \qquad (6)$$

<u>Conditions initiales</u> :

En supposant l'objet lâché sans vitesse initiale

A $t = 0$, $v = 0$

On obtient la valeur de λ

$$\lambda = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}$$

En substituant cette valeur dans l'expression de la vitesse (6), on obtient finalement

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\; \mathrm{Tanh}\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\, t\right) \qquad (7)$$

<u>Remarque</u> :

Si l'argument de Tanh est infiniment petit devant 1

$$\mathrm{Tanh}\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\, t\right) \sim \sqrt{\frac{gk}{m}}\, t + \mathrm{h.o.t}$$

En remplaçant dans (7), on retrouve l'expression de la vitesse de chute libre : $v(t) = g\,t$

E. Expression de la position

En intégrant l'expression (7), on obtient la position

$$y(t) = \frac{m}{k} \operatorname{Log}\left[\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\frac{g k}{m}}\, t\right)\right] + K \quad (8)$$

<u>Remarque</u> :

Si l'argument de Cosh est infiniment petit devant 1

$$\operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\frac{g k}{m}}\, t\right) \sim 1 - \frac{g k}{m} \frac{t^2}{2} + \text{h.o.t}$$

$$\operatorname{Log}\left[1 - \frac{g k}{m} \frac{t^2}{2}\right] \sim -\frac{g k}{m} \frac{t^2}{2} + \text{h.o.t}$$

En remplaçant dans (8), on retrouve l'expression de la position d'un objet en chute libre :

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2$$

F. Durée de la chute

A partir de l'expression (8) et en plaçant le référentiel au départ de la boule, on peut calculer la durée de la chute.

$$t = \sqrt{\frac{m}{g k}} \operatorname{Cosh}^{-1}\left(e^{\frac{k y}{m}}\right) \quad (9)$$

On constate alors que la durée de la chute d'un objet dans l'air, c'est à dire, en tenant compte des frottements de l'air est fonction de la masse de celui-ci et du coefficient de frottements.

G. Exploitation des résultats

La question était de savoir si deux objets de même matière mais de masses différentes tombaient à la même vitesse.

L'examen de l'expression de la vitesse (7) montre que le paramètre déterminant pour répondre à cette question est le facteur m / k qu'il faut donc évaluer.

Considérons deux boules B et B' de même matière.
Le fait que ces deux boules soient de même matière implique que leur masse volumique est identique.

$$\rho = \rho' \qquad (10)$$

La masse volumique d'un corps est définie comme le rapport de la masse de ce corps par son volume : $\rho = m / V$

On en déduit que la masse peut être exprimée comme le produit de la masse volumique par le volume : $m = \rho \times V$

Ceci est valable pour la seconde boule : $m' = \rho' \times V'$
Or, puisque $\rho = \rho'$, on a : $m' = \rho \times V'$

Le volume d'une boule étant égal à : $4 \pi r^3 / 3$, on a :

$$m = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ et } m' = \rho \frac{4}{3} \pi r'^3$$

En ce qui concerne le coefficient de frottements k, il est défini par :

$$k = \frac{1}{2} C_W \rho_{air} A = \frac{1}{2} C_W \rho_{air} \pi r^2$$

On a donc pour chaque boule :

$$k = \frac{1}{2} C_W \rho_{air} \pi r^2 \text{ et } k' = \frac{1}{2} C_W \rho_{air} \pi r'^2$$

Le rapport k / m pour chaque boule va s’écrire :

$$\frac{k}{m} = \frac{3}{8} C_w \frac{\rho_{air}}{\rho} \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \frac{k'}{m'} = \frac{3}{8} C_w \frac{\rho_{air}}{\rho} \frac{1}{r'}$$

que l’on peut réécrire pour simplifier :

$$\frac{k}{m} = \frac{\alpha}{r} \quad \text{et} \quad \frac{k'}{m'} = \frac{\alpha}{r'} \qquad (11)$$

La vitesse de chaque boule peut donc s’écrire ainsi :

$$v(t) = \sqrt{\frac{r\,g}{\alpha}}\ \mathrm{Tanh}\left(\sqrt{\frac{g\alpha}{r}}\ t\right) \quad \text{et} \quad v'(t) = \sqrt{\frac{r'\,g}{\alpha}}\ \mathrm{Tanh}\left(\sqrt{\frac{g\alpha}{r'}}\ t\right)$$

Il apparaît donc clairement que ces deux vitesses sont différentes puisque les rayons r et r’ des deux boules sont différents*.
On est donc tenté de conclure que dans l’air, elles ne toucheront pas le sol en même temps. Cependant …

*<u>Remarques</u> :

Les deux boules ont la même masse volumique, mais des masses différentes. Ceci n’est possible que si les rayons des deux boules sont différents. S’ils ne l’étaient pas, elles auraient la même masse.

En utilisant l’expression (11), on peut exprimer la durée (9) de chute dans l’air en fonction du rayon de la boule :

$$t = \sqrt{\frac{r}{g\alpha}}\ \mathrm{Cosh}^{-1}\left(e^{\frac{\alpha h}{r}}\right) \qquad (12)$$

H. Etude numérique

Aristote dit qu'une « boule de fer de cent livres, tombant de cent coudées, touche terre avant qu'une boule d'une livre ait parcouru une seule coudée », et je vous dis, moi, qu'elles arrivent en même temps; vous constatez, en faisant l'expérience, que la plus grande précède la plus petite de deux doigts, c'est-à-dire que quand celle-là frappe le sol, celle-ci s'en trouve encore à deux doigts ; or, derrière ces deux doigts vous voudriez cacher les quatre-vingt-dix-neuf coudées d'Aristote, et, parlant seulement de ma petite erreur, passer sous silence l'énormité de l'autre.

Galilée : *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*

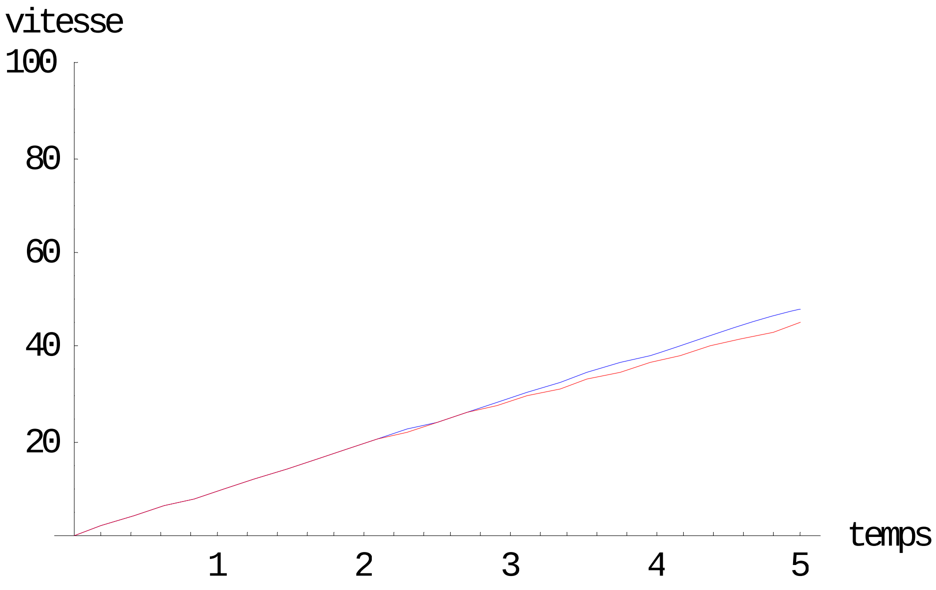
Reprenons l'expérience de Galilée.
Au préalable, rappelons qu'une livre vaut 339.542 g et qu'une coudée vaut 57.3 cm.
Considérons deux boules de fer ($\rho_{Fer} \approx 7897$ kg.m^{-3}).
La première ayant une masse d'une livre à un rayon d'environ 2 cm, la seconde ayant une masse de cent livres à un rayon d'environ 10 cm.

Boule	B	B'
Rayon	r = 0.02173 m	r' = 0.10087m
Masse	m = 1 livre = 0.339542 kg	m' = 100 livres = 33.9542 kg

Le rapport des masses m' / m est de l'ordre de 100, celui des rayons de l'ordre de 5, ce qui place l'expérience dans le cadre de celle qu'aurait effectué Galilée.

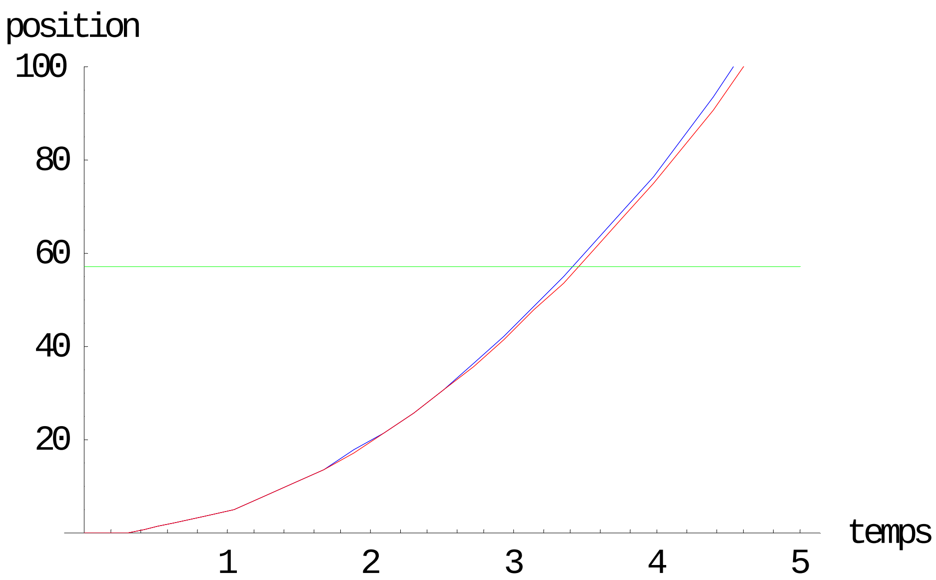
En utilisant *Mathématica*, on peut obtenir les courbes représentatives de la vitesse en fonction du temps de la chute de deux boules de masses différentes (courbe n°1), de la position des deux boules (courbe n°2).
On peut également calculé précisément la durée de la chute de chaque boule.

Courbe n°1 : Vitesse des deux boules de fer de 1 livre et 100 livres



On constate en effet que la vitesse de la boule de rayon r = 0,02 m (en rouge) est légèrement inférieure celle de la boule de rayon r' = 0,1 m (en bleu). Ce qui confirme l'hypothèse aristotélicienne selon laquelle un corps lourd tombe plus vite qu'un corps léger.

Courbe n°2 : Position des deux boules de 1 livre et 100 livres



L'asymptote horizontale (en vert) représente le sol.
On constate que la différence entre ces deux vitesses est extrêmement faible et ne devient apparente qu'à partir du temps t = 2 s qui correspond au dernier tiers de la chute, c'est à dire le moment où il devient de plus en plus difficile de distinguer les distances entre les boules.

<u>Durée de la chute de chaque boule</u> :

La première boule de cent livres chute pendant un temps égal à $t_1 = 3.42601$ s, la seconde boule d'une livre chute pendant un temps égal à $t_2 = 3.45569$ s
On constate naturellement une durée légèrement plus grande pour la boule plus légère puisqu'elle tombe moins vite.
Néanmoins, la différence entre ces temps de chute : 0.0296759 s paraît inaccessible à la mesure pour un homme du XVII$^{\text{ème}}$ siècle qui évaluait le temps en prenant son pouls !

La clé du problème n'est pas là et c'est un autre argument dont il nous faut user pour comprendre. Cet argument est entièrement contenu dans l'extrait des *Discours*.

Où se trouve la boule la plus légère lorsque la plus lourde atteint le sol ?

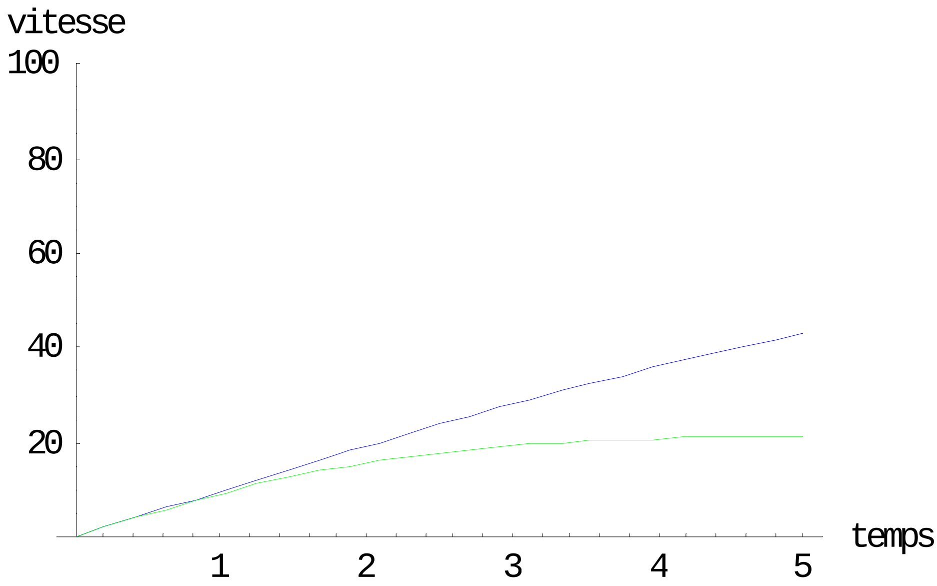
Galilée affirme que *celle-ci s'en trouve encore à deux doigts*.

Le calcul nous donne la position de la boule légère au temps $t_1 = 3.42601$ s, c'est-à-dire, à l'instant où la boule la plus lourde a atteint le sol.
En remplaçant t_1 dans l'équation (8) on obtient : 56.3408 m.
Au bout de 3.42 secondes environ, c'est-à-dire, du temps nécessaire à la boule la plus lourde pour atteindre le sol, la boule la plus légère se trouve encore à plus de 1 mètre du sol (0.9592 m). Et non pas deux doigts comme Galilée l'avait prédit.

I. Le cas des boules d'Allègre

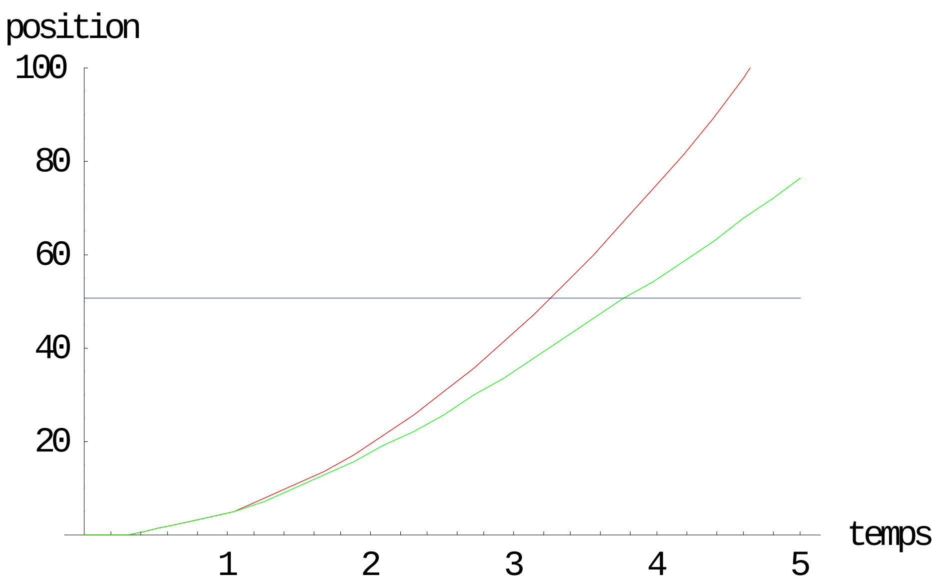
Ce cas d'école, si j'ose dire devient très intéressant. Il ajoute au problème un paramètre de plus : la texture des boules. N'importe quel bon joueur de tennis vous fera immédiatement remarquer que les effets imprimer à une balle sont d'autant plus importants que son revêtement est en bon état.
Le grand chroniqueur et ancien capitaine de l'équipe de France de tennis Jean-Paul Loth expliquait cela durant un match de finale de Roland Garros. Intuitivement le feutre recouvrant une balle de tennis devrait freiner celle-ci durant sa chute, néanmoins, en suivant le même raisonnement que précédemment on va pouvoir montrer que si les arguments opposés à Monsieur Allègre sont assez moyenâgeux, la métaphore de la boule de pétanque et de la balle de tennis relève de la mauvaise vulgarisation.

Considérons une boule de pétanque de masse 700 grammes et d'un diamètre de 7.5 centimètres et une balle de tennis ayant à peu près le même diamètre que la boule de pétanque, mais une masse égale à 58 grammes. Laissons tomber ces objets du sommet de la tour de Pise, haute de 51 mètres.
La simple comparaison des vitesses de chute montre déjà un écart important.



On constate que vitesse de la boule de pétanque (en bleu) est supérieure à celle de la balle de tennis et ce dès la première seconde de chute.

La comparaison des positions des deux objets met également en évidence un écart important.



Mais le coup de grâce est donné à cette métaphore par l'argument de la position de la balle de tennis une fois que la boule de pétanque a touché le sol. Lorsque la boule de pétanque touche le sol, la balle de tennis se trouve encore à un peu plus de 10 mètres du sol.
De plus, ce calcul doit être en dessous de la réalité, car, on a supposé que le coefficient de pénétration dans l'air d'une boule de pétanque lisse et d'une balle de tennis habituellement rugueuse étaient les mêmes.
Ce qui est certainement faux.
En fait, il semble assez raisonnable de considérer que la balle de tennis aurait au moins dix mètres de retard sur la boule de pétanque mais certainement plus.

J. Conclusion

Galilée ne s'est pas trompé. Il a simplement voulu montrer que si la masse influe sur la chute des graves son influence n'est pas aussi importante que l'affirmait Aristote. De plus, dans ce problème certaine variables ont un effet très important : la masse, comme on vient de le voir mais aussi et surtout, comme on s'en doutait, le rayon et par là même le volume, c'est-à-dire la forme de l'objet qui tombe. En effet, si le rapport des rayons est dans un rapport de deux, l'écart temporal et surtout spatial entre les deux boules est imperceptible. Si ce rapport devient élevé, c'est-à-dire, si l'une des deux boules est très grande par rapport à l'autre, alors l'influence des frottements produit une différence sensible en espace et en temps.

Si on prend des boules dont le rapport des rayons est de 2 et celui des masses est de 8, le retard spatial de la plus légère sur la plus lourde est inférieur à 1 mètre. Retard difficile à apprécier …

K. Bibliographie

Galiléo Galiléi. *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, Masson, 1972.
A.Koyré. *Etudes d'histoire de la pensée scientifique*, Gallimard, 1973.
C. Gilormini & G. Hirsch. *Equations Différentielles*, Masson, 1985.

<u>Texte original de Galilée</u>

Simplicio : « Aristote s'élève contre certains anciens qui introduisaient le vide à cause du mouvement, disant que celui-ci ne pourrait avoir lieu sans celui-là. S'opposant à cette thèse, Aristote démontre que, tout au contraire, la réalité du mouvement rend le vide impossible [...] des mobiles de poids différents se meuvent dans le même milieu avec des vitesses inégales ayant entre elles même proportion que les poids [...] les vitesses du même mobile dans différents milieux sont inversement proportionnelles à la densité de ces milieux [...] un mobile devrait dans le vide se mouvoir instantanément ; or le mouvement instantané est impossible, donc on ne peut introduire le vide à cause du mouvement.

Salviati : [...] Je doute qu'Aristote ait jamais vérifié expérimentalement s'il est vrai que deux pierres, dont l'une est dix fois plus pesante que l'autre et qu'on laisse tomber au même instant d'une hauteur de cent coudées, par exemple, aient des vitesses si différentes que la plus grande touche déjà terre alors que l'autre n'a même pas descendu dix coudées.

Simplicio : On voit pourtant d'après ses propres paroles qu'il a fait l'expérience ...

Sagredo : Mais moi qui en ai fait l'essai, seigneur Simplicio, je vous assure qu'un boulet d'artillerie pesant cent ou deux cents livres, ou même davantage, ne précédera même pas d'une palme, en touchant terre, une balle de mousquet dont le poids n'excède pas une demi-livre, et cela après une chute commune de cent coudées. »

La loi d'universalité de la chute des corps peut être masquée par des forces exercées par le milieu sur le corps en mouvement ; Galilée le sait.

Salviati : « Nous nous proposons de rechercher ce qui arriverait à des mobiles de poids très différents dans un milieu dont la résistance serait nulle... et si nous trouvons qu'effectivement des mobiles de poids spécifiques variables ont des vitesses de moins en moins différentes selon que les milieux sont de plus en plus aisés à pénétrer, qu'en fin de compte dans le milieu le plus ténu bien que non vide, et pour des poids très inégaux, l'écart des vitesses est très petit et presque insensible, alors nous pourrons admettre, me semble-t-il avec une très grande probabilité, que dans le vide les vitesses seraient toutes égales […]

Salviati : L'expérience qui consiste à prendre deux mobiles de poids aussi différents que possible et à les lâcher d'une hauteur donnée pour observer si leurs vitesses sont égales, offre quelques difficultés, car si la hauteur est importante, le milieu que le corps, en tombant, doit ouvrir et repousser latéralement par son mouvement, gênera beaucoup plus le faible moment du mobile le plus léger que la force considérable du plus lourd, et sur une longue distance le corps léger demeurera ainsi en arrière. »

Ces difficultés ont conduit Galilée à confirmer sa démonstration par des expériences de chute le long d'un plan incliné et surtout par les expériences d'oscillations de deux pendules. La vitesse étant plus faible, la résistance de l'air est alors moins gênante. C'est de cette façon que Galilée a prouvé, par l'expérience, l'universalité de la chute libre et c'est avec la même technique que les expériences les plus précises ont été réalisées pendant les trois siècles suivants. C'est seulement récemment que des expériences précises de chute dans le vide ont pu être faites à l'aide de «tours de chute libre».
Pour emporter la conviction, Galilée a longuement discuté la résistance de l'air au mouvement :

Salviati : « Si fluide, si ténu et si tranquille que soit le milieu, il s'oppose en effet au mouvement qui le traverse avec une résistance dont la grandeur dépend directement de la rapidité avec laquelle il doit s'ouvrir pour céder le passage au mobile ; et comme celui-ci par nature va en accélérant continuellement, il rencontre de la part du milieu une résistance sans cesse croissante, d'où résulte un ralentissement... si bien que la vitesse d'une part, la résistance du milieu de l'autre atteignent à une grandeur où, s'équilibrant l'une l'autre, toute accélération est empêchée, et le mobile réduit à un mouvement régulier et uniforme qu'il conserve constamment par la suite. »

L’objectif de Galilée est de montrer que les mouvements seraient les mêmes dans le vide, mais pour convaincre, il lui faut comprendre les mouvements réels et donc comprendre la résistance de l'air.