Du rôle de la Géométrie Différentielle dans l'étude des systèmes dynamiques chaotiques

Jean-Marc Ginoux et Bruno Rossetto

IUT de Toulon
Département GMP, Laboratoire PROTEE
BP 20132, 83957 La Garde Cedex

ginoux@univ-tln.fr ; rossetto@univ-tln.fr

Sections de rattachement : 60, 61

Résumé*. Cet exposé a pour but de mettre en lumière l'intérêt que présente l'application de certaines notions de Géométrie Différentielle à l'étude des systèmes dynamiques chaotiques.*
Des propriétés métriques locales, comme la courbure et la torsion, élaborées par des mathématiciens français au cours du XIXe siècle permettent de décrire une partie de l'évolution des courbes trajectoires, intégrales de systèmes dynamiques chaotiques et, par conséquent une partie de l'attracteur chaotique qu'elles dessinent. Ainsi, il apparaît aujourd'hui que la géométrie différentielle a toute sa place dans leur étude, en complément d'autres méthodes qui ont fait l'objet de nombreux travaux ces dernières années.

Mots-Clés*. Systèmes dynamiques chaotiques ; attracteurs étranges ; Géométrie Différentielle ;*

« Une théorie complète des fonctions définies par des équations différentielles serait d'une grande utilité dans un grand nombre de questions de Mathématiques pures ou de Mécanique. Malheureusement, il est évident que dans la grande généralité des cas qui se présentent on ne peut intégrer ces équations à l'aide des fonctions déjà connues (…).
Rechercher quelles sont les propriétés des équations différentielles est donc une question du plus haut intérêt. On a déjà fait un premier pas dans cette voie en étudiant la fonction proposée dans le voisinage d'un point du plan. Il s'agit aujourd'hui d'aller plus loin et d'étudier cette fonction dans toute l'étendue du plan (…). L'étude complète d'une fonction comprend deux parties :

1° Partie qualitative (pour ainsi dire), ou étude de la courbe définie par la fonction ;
2° Partie quantitative, ou calcul numérique des valeurs de la fonction (…).

C'est naturellement par la partie qualitative qu'on doit aborder la théorie de toute fonction et c'est pourquoi le problème qui se présente en premier lieu est le suivant :
Construire les courbes définies par des équations différentielles. »

H. Poincaré – Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle –

1. Géométrie Différentielle et systèmes dynamiques

Du XVIIIe siècle à nos jours les méthodes de résolution de systèmes d'équations différentielles, i.e., de systèmes dynamiques, n'ont cessé d'évoluer. Cependant la non-intégrabilité de certains de ces systèmes a conduit à utiliser la Géométrie Différentielle dans le but d'étudier de manière qualitative le comportement de leurs solutions. Afin de situer l'approche présentée dans cet article par rapport au développement de ces méthodes, un bref rappel historique est présenté ci-dessous[1].

La Géométrie Différentielle qui vise à étudier les propriétés locales et intrinsèques des courbes et des surfaces non-euclidiennes tient son nom du fait qu'elle est née de la possibilité d'une interprétation cinématique que le calcul infinitésimal apporte à l'étude des courbes planes ou gauches. L'histoire des courbes planes est intimement liée à l'histoire et aux développements du calcul infinitésimal, et les premiers résultats obtenus au XVIIe siècle sont directement issus de considérations géométriques et cinématiques. Les courbes dans l'espace à trois dimensions, i.e., les courbes gauches (dites à « double courbure ») ont été étudiées par A. Clairaut (1731). Les notions d'arc et de rayon courbure de courbes planes ainsi que celle de plan osculateur (Cf. infra) ont été introduites par J. Bernoulli (1744). C'est G. Monge qui, dans un mémoire présenté en 1771, introduisit les notions fondamentales de rayon de courbure et de surface réglée développable engendrée par les tangentes à une courbe gauche. Les mots « angle de courbure » et « angle de torsion » furent utilisés pour la première fois par L.-L. de Vallée (1819) dans son Traité de géométrie descriptive qui contient la théorie des courbes dans l'espace et des surfaces. En 1826, L.-A. Cauchy définit la « normale principale » et donna des expressions de la courbure et de la torsion. (Si la notion de courbure d'une courbe peut être appréhendée de manière intuitive, celle de torsion nécessite d'être précisée. Elle exprime l'écart entre la courbe et une courbe plane). Le terme « binormale » fut utilisé pour la première fois par A.-J.-C. Barré de Saint Venant (1845) dans son Mémoire sur les lignes courbes non-planes. Puis, F. Frénet (1847) et J.-A. Serret (1850) démontrèrent l'équivalent des formules qui portent leur nom. Ces formules ont pour but de définir un référentiel se déplaçant avec la courbe et auquel est associée une base formée à l'aide des vecteurs « tangent » et « normal » à la courbe et du vecteur « binormal » perpendiculaire au plan contenant les deux autres, i.e., le plan osculateur (du latin osculor, osculatus = caresser). Ce référentiel en mouvement a également été appelé « repère mobile » ou trièdre de Frénet-Serret.

---

[1] *Pour une étude détaillée de l'histoire de la géométrie différentielle voir Struik (1933)*

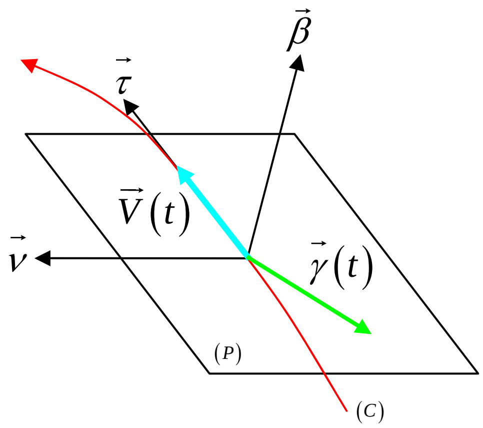

Figure 1. *Repère de Frénet et plan osculateur.*

A partir de 1887, G. Darboux publia ses Leçons sur la théorie des surfaces (1887-1896) dans lesquelles il exposa, entre autre, ses travaux sur la méthode du trièdre mobile et son étude des surfaces définies par des propriétés cinématiques et des surfaces minima. A la même époque l'étude des fonctions définies par les équations différentielles connue un essor considérable. Ces fonctions pouvaient être représentée sous la forme d'un système d'équations différentielles qui ne possédait pas a priori, de solution analytique générale. La méthode de résolution consistait alors à construire un développement en série autour des points « singuliers ». Cauchy, qui le premier avait établi l'existence et l'unicité des solutions, avait élaboré vers 1830 une méthode qu'il avait dénommée « Calcul des limites », afin de démontrer que, sous certaines hypothèses, la série convergeait vers une solution. Cependant, Cauchy avait exclu dans son analyse certains points « singuliers », i.e., des points où le comportement des solutions, plus compliqué, était impossible à affronter par cette méthode. Toutefois, comme l'avaient montré d'abord C. Briot et J.-C. Bouquet et ensuite L. Fuchs, dans certains cas, aux voisinages de points singuliers dits « réguliers », on pouvait encore représenter la fonction par des séries convergentes. Néanmoins, face à l'insuffisance de la méthode d'intégration par séries, Henri Poincaré se tourna vers une étude globale qui consistait à analyser de manière qualitative le comportement des solutions dans « toute l'étendue du plan ». Poincaré écrivit :

« Nos développements ne nous apprendraient pas, à moins d'un travail considérable, si par exemple la fonction va constamment croissant, ou si elle oscille entre certaines limites, si elle peut croître au-delà de toute limite… En d'autres termes, si l'on considère que la fonction définit une courbe plane, on ne saurait pas quelle est la forme générale de cette courbe. »

Dans une série de mémoires intitulés « Sur les courbes définies par une équation différentielle » (1881-1886), il propose d'étudier sans intégration préalable les propriétés géométriques des *courbes trajectoires* solutions d'équations différentielles[2] et, en particulier, la nature et le comportement de leurs points « singuliers ». Confronté à l'étude d'un système d'équations différentielles, c'est-à-dire à ce que l'on appelle aujourd'hui, sous certaines conditions, un système dynamique, Poincaré va s'intéresser à l'allure des *courbes trajectoires* représentant la solution de ces systèmes. Il va ainsi, tout au long de cette série de mémoires, élaborer une classification en dimension deux, puis trois du comportement géométrique des *courbes trajectoires*.

Si le concept de chaos ne voit le jour qu'avec le célèbre papillon d'E.N. Lorenz en 1963, si le mot même de chaos n'est introduit dans la littérature scientifique qu'en 1975 par Li et Yorke dans un article intitulé « Period three implies chaos », c'est Henri Poincaré qui en donna la première définition.

« Il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux. Une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les dernières. La prédiction devient alors impossible ».

H. Poincaré – Science et Méthode –

C'est bien cette sensibilité aux conditions initiales décrite par Henri Poincaré qui est responsable de l'imprédictibilité d'un phénomène comme la météorologie par exemple, et qui permet de le qualifier de chaotique. Les *courbes trajectoires* intégrales de systèmes dynamiques évoluent dans un espace Mathématique appelé espace des phases et dans lequel elles expriment en divergeant leur sensibilité aux conditions initiales. En effet, les solutions mathématiques d'équations différentielles ne peuvent être qualifiées de chaotiques. Mais, dans les domaines où elles sont sensibles aux conditions initiales, deux trajectoires voisines s'écartent l'une de l'autre exponentiellement et la moindre perturbation physique peut engendrer des écarts considérables.
D'autre part, leur évolution dans l'espace des phases peut les conduire à atteindre un point particulier appelé point fixe ou point singulier, à tendre asymptotiquement vers l'infini ou à rester « confinées » dans une certaine région de cet espace. On dit alors qu'elles sont attirées vers un attracteur. Le plus simple des attracteurs est le point fixe. Mais les *courbes trajectoires* peuvent également tourner autour d'un point fixe sans jamais l'atteindre en décrivant un cercle. Ou encore en dessiner dans l'espace des phases une figure géométrique quelconque : un papillon par exemple.
Dans ce cas l'attracteur est qualifié d'étrange car il possède une propriété curieuse : celle d'avoir une dimension non-entière, i.e., fractale. Quant à la terminologie « attracteur étrange » qui ne fait qu'accroître le mystère et l'incompréhension engendré par la théorie du chaos, elle est due à David Ruelle, professeur de physique théorique à

[2] *L'approche géométrique des équations différentielles de Poincaré en contraste avec les développements de l'analyse au dix-neuvième siècle a été étudiée par Gilain (1977)*

l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques à Bures-sur-Yvette dans l'Essonne qui a introduit ce terme en 1971 dans un fameux article co-écrit avec Floris Takens un mathématicien néerlandais et intitulé « De la nature de la turbulence ».
Dans l'espace des phases, les *courbes trajectoires* intégrales de systèmes dynamiques chaotiques transcrivent deux propriétés contradictoires. D'une part, la sensibilité aux conditions initiales qui implique leur divergence et, d'autre part le confinement sur l'attracteur qui nécessite une certaine convergence vers celui-ci. L. O. Chua a démontré que, pour qu'il y ait « chaos », il faut une source produisant une « activité locale » et dont il montre qu'elle est à l'origine de la complexité.

En 1962, Edward Lorenz proposait un modèle simplifié susceptible de décrire les évolutions météorologiques. Son intégration numérique allait révéler que les *courbes trajectoires* étaient astreintes à évoluer sur un attracteur étrange ayant la forme d'un papillon.

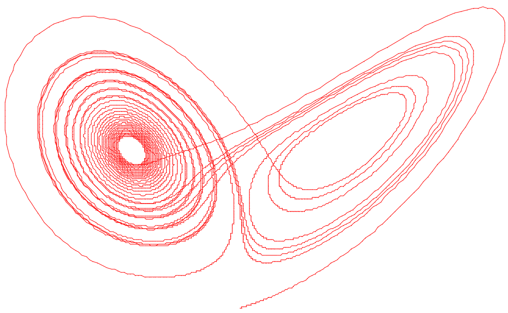

Figure 2. *Attracteur chaotique d'E.N. Lorenz (1963).*

Si l'on regarde de plus près les *courbes trajectoires* on s'aperçoit que bien qu'évoluant dans un espace à trois dimensions et bien qu'étant aussi proches que possibles, celles-ci ne remplissent pas tout l'espace de façon dense. Il y a du vide que les *courbes trajectoires* ne remplissent jamais. Ainsi, la dimension de l'attracteur chaotique est supérieure à deux puisque ses *courbes trajectoires* évoluent dans un espace de dimension trois, mais elle est inférieure à trois puisque ses *courbes trajectoires* ne couvrent pas l'espace de façon dense.
Dans une conférence grand public exposée en 1972 et intitulé « Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil déclenchera-t-il une tornade au Mexique ? » Lorenz expliquait comment le battement des ailes d'un papillon, après quelques mois, a un tel effet sur l'atmosphère de la Terre entière qu'il peut donner lieu à une tempête dévastatrice dans une contrée éloignée. Ce qui rappelle ce qu'écrivait Poincaré, mais paraît tellement extrême qu'on peut se demander s'il faut accorder à « l'effet papillon » plus qu'une valeur métaphorique.

Depuis le début des années soixante-dix, avec l'arrivée des outils informatiques de représentation graphique, de nombreux attracteurs étranges ont pu être mis en évidence. Au papillon de Lorenz est venu s'ajouter la moule de Rössler, le double scroll de Chua, la tasse thé d'Hastings et Powell, … et même un escargot chaotique. En effet, à partir d'un modèle élaboré pour transcrire l'évolution de la densité de trois espèces interagissant dans un mode prédateur-proie, un nouvel attracteur étrange en forme d'escargot a été obtenu.

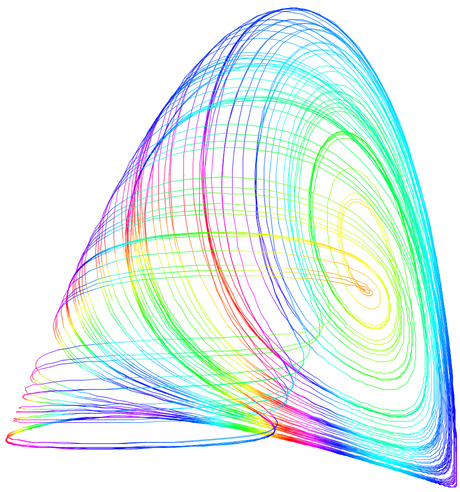

Figure 3. *Attracteur chaotique (Ginoux et al. 2005).*

2. Géométrie Différentielle et systèmes dynamiques

Si la non-intégrabilité des systèmes dynamiques chaotiques proscrit toute tentative d'expliciter l'équation de la « courbe trajectoire », une approche géométrique, i.e., qualitative selon Henri Poincaré, reste néanmoins possible. En effet, en interprétant les *courbes trajectoires* comme des courbes paramétrées on peut leur attribuer des propriétés métriques locales comme la courbure et la torsion. Ainsi, on peut donc définir la courbure et la torsion locale d'une courbe dont ignore l'équation. Le mot locale est ici d'une portée considérable car il rappelle qu'une connaissance globale de ces propriétés métriques permettrait d'obtenir l'équation analytique de la *courbe trajectoire*.

Le cas particulier de certains systèmes dynamiques qualifiés de lents-rapides, c'est-à-dire, dont les *courbes trajectoires* évoluent de façon lente sur une partie de l'attracteur et rapide sur une autre est très intéressant. Il a donné lieu depuis la seconde moitié du XXe à de nombreux travaux qui ont permis d'établir une équation analytique de la variété sur laquelle s'appuient les *courbes trajectoires* pendant leur évolution lente. Cette variété

baptisée variété lente revêt une grande importance dans l'étude de ces systèmes dynamiques puisqu'elle structure l'attracteur en lui conférant une certaine stabilité. Les démarches adoptées pour la détermination de l'équation de cette variété ont été assez similaires à celles employées au début du XIXe. Les développements tout d'abord puis une approche qualitative ensuite.
Cette dernière basée sur l'utilisation des propriétés métriques locales de courbure et de torsion a conduit à une détermination analytique de l'équation de la variété lente.

Puisque les *courbes trajectoires* convergent de façon exponentiellement rapide vers le voisinage de ces variétés, on peut démontrer qu'elles possèdent les mêmes propriétés métriques locales que celles-ci. Ainsi, l'utilisation de la Géométrie Différentielle apporte d'une part une information sur la forme géométrique de la partie lente des *courbes trajectoires* et, fournit d'autre part l'équation analytique d'une variété située dans son très proche voisinage.

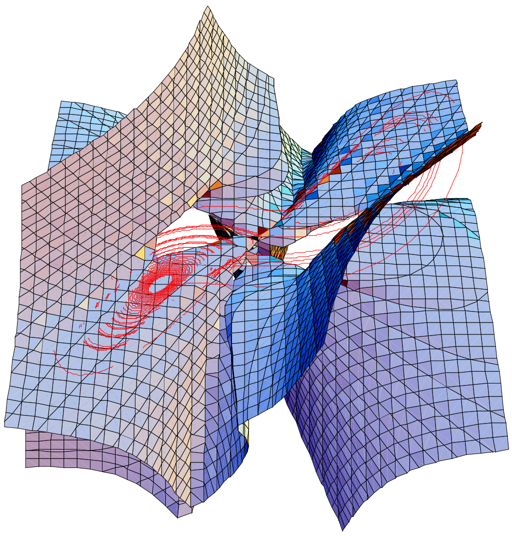

Figure 4. *Variété lente de l'attracteur chaotique d'E.N. Lorenz (1963).*

Sur cette figure on observe une nappe représentant la variété lente de l'attracteur d'E.N. Lorenz dont l'équation analytique a été obtenu en cherchant le lieu géométrique des points où la torsion des *courbes trajectoires* du modèle de Lorenz s'annule. On constate que les *courbes trajectoires* convergent asymptotiquement et localement vers une partie de cette surface. De plus, la partie de ces courbes « immergée » dans la surface représente la partie lente des *courbes trajectoires* du modèle de Lorenz.

3. Discussion

Différentes approches ont semble-t-il été envisagées afin d'étudier le comportement *local* puis *global* des *courbes trajectoires* intégrales de *systèmes dynamiques chaotiques*. De nombreuses méthodes analytiques basées sur des développements en série ont permis de fournir un certain nombre d'information sur l'évolution des *courbes trajectoires* au voisinage des *points fixes*, par exemple ou sur leur comportement asymptotique, i.e., existence de solutions bornées. Néanmoins, l'étude de *systèmes dynamiques chaotiques* assujettie à l'utilisation d'ordinateur fournissant de façon quasi-instantanée leur *portrait en phase*, i.e., leurs *courbes trajectoires*, a eu pour effet d'éluder d'une certaine manière l'aspect géométrique de ces *courbes trajectoires*. De la fin du XIX^{e} jusqu'au milieu du XX^{e} l'élaboration du *portrait en phase* nécessitait un investissement en temps considérable. C'est la raison pour laquelle l'étude *qualitative* de ces *courbes trajectoires* avait toute sa raison d'être. En effet, une telle approche permettait d'esquisser l'allure des *courbes trajectoires* dans l'*espace des phases*. Il semble qu'aujourd'hui l'utilisation des notions de *courbure* et *torsion* renoue avec une démarche qui consistait en une « application de l'analyse à la géométrie ». La *Géométrie Différentielle* qui s'est tour à tour appelée *Géométrie Analytique*, puis *Géométrie Cinématique* paraît offrir de belles perspectives quant à son application à l'étude des *systèmes dynamiques chaotiques*.

Bibliographie

Darboux, G., *Leçons sur la théorie des surfaces*, tomes I-IV, Gauthier-Villars, Paris, 1887-1896.

Frenet, F., « Sur les courbes à double courbure », Thèse Toulouse, 1847. Résumé dans *J. de Math.*, 17, 1852.

Gilain, C., La Théorie géométrique des équations différentielles de Poincaré et l'histoire de l'Analyse, Thèse, Université de Paris I, 1977.

Ginoux, J.M., Rossetto, B., Jamet, J.L., « Chaos in a three-dimensional Volterra-Gause model of predator-prey type », *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 5, Vol. 15, 2005, p. 1689-1708.

Lorenz, E. N., « Deterministic non-periodic flows », *J. Atmos. Sc.*, 20, 1963, p. 130-141.

Li, T.Y. & Yorke, JA, « Period three implies chaos », *Amer. Math. Monthly*, 82, 1975, p. 985-992.

Poincaré, H., *Œuvres complètes*, Gauthier-Villars, Paris, 1928-1956.

Ruelle, D, Takens, F. « On the nature of turbulence », *Com. of Math. Phy.*, 20, 1971, p. 167-192.

Serret, J.-A., « Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure », *J. de Math.*, 16, 1851, p. 193-207.

Struik, D.J., « Outline of a history of Differential Geometry », *Isis*, 19, 1933, p. 92-120.

Struik, D.J., « Outline of a history of Differential Geometry », *Isis*, 20, 1933, p. 161-191.