

Résumé

Ce mémoire a pour objectif d'étudier la *stabilité* de systèmes dynamiques chaotiques à partir de la structure géométrique de leurs *attracteurs* dont une partie s'appuie sur une *variété* appelée *variété lente*. Dans ce but, une nouvelle approche basée sur certains aspects du formalisme de la *Mécanique du Point* et de la *Géométrie Différentielle* a été développée et a conduit à une interprétation *géométrique* et *cinématique* de l'évolution des *courbes trajectoires*, intégrales de ces systèmes dynamiques au voisinage de la *variété lente*, et à l'étude de leur stabilité.

L'utilisation du formalisme de la *Mécanique du Point* a permis, grâce à l'emploi des vecteurs, vitesse et accélération instantanées attachées à un point courant de la *courbe trajectoire*, de discriminer le domaine lent du domaine rapide et de situer la position de la *variété lente* à l'intérieur de l'espace des phases.

Certaines notions de *Géométrie Différentielle*, comme la *courbure*, la *torsion* et le *plan osculateur*, ont fourni une équation analytique de la *variété lente* indépendante des *vecteurs propres* lents du *système linéaire tangent*, donc définie sur un plus grand domaine de l'espace des phases.

La *variété lente* a alors été envisagée comme le lieu des points où la *courbure* des *courbes trajectoires*, intégrales de ces systèmes dynamiques, est minimum (en dimension deux ce minimum devient égal à zéro). Le signe de la *torsion* a permis, de caractériser son *attractivité* et, de discriminer la partie *attractive* de la partie *répulsive* de la *variété lente* et de statuer sur la *stabilité* de ces *courbes trajectoires*.

Ainsi, la présence dans l'espace des phases d'une *variété lente attractive* qui contraint les *courbes trajectoires*, intégrales du système dynamique à visiter son voisinage permet d'étudier la structure de l'*attracteur*.

Cette approche basée sur certains aspects du formalisme de la *Mécanique du Point* et de la *Géométrie Différentielle* et qui s'est accompagnée de l'élaboration de programmes numériques a permis de constituer un nouvel outil d'investigation des systèmes dynamiques chaotiques.

Son application à des modèles de référence comme celui de B. Van der Pol, de L.O. Chua ou d'E.N. Lorenz a permis d'obtenir plus directement et avec précision l'équation analytique de leur *variété lente*. De plus, une étude détaillée des modèles de type *prédateur-proie* comme celui de Rosenzweig-MacArthur ou d'Hastings-Powell, a conduit d'une part à la détermination de leur *variété lente* et d'autre part à la conception d'un nouveau modèle de type *prédateur-proie* à trois espèces appelé Volterra-Gause dont l'*attracteur* chaotique a la forme d'un escargot (chaotic snail shell).

Mots-Clés : *systèmes dynamiques autonomes lents-rapides, stabilité, chaos, attracteurs étranges, repère de Frénet, courbure, torsion.*